# Vorlesung 8b

# Mehrstufige Zufallsexperimente

## Teil 1

## Mehrstufigkeit und Multiplikationsregel

(Buch S. 94-95)

bisher Zweistufigkeit nur von “heute” zu “morgen”

jetzt zusätzlich von “heute & morgen” zu “übermorgen”, etc.

bisher Zweistufigkeit nur von “heute” zu “morgen”

jetzt zusätzlich von “heute & morgen” zu “übermorgen”, etc.

Für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ hat man

*Übergangswahrscheinlichkeiten*

$$P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1}) = \mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) \ ,$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i+1)$-ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \ldots, X_i = a_i\}$.

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$

ergibt sich rekursiv als

*Multiplikationsregel*

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}) P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)$$

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$

ergibt sich rekursiv als

*Multiplikationsregel*

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}) P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)$$

$$= \cdots$$

$$= \rho(a_1) P(a_1, a_2) \cdots P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)$$

$$=: \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) \cdots \mathbf{P}_{a_1 \cdots a_{n-1}}(X_n = a_n)$$

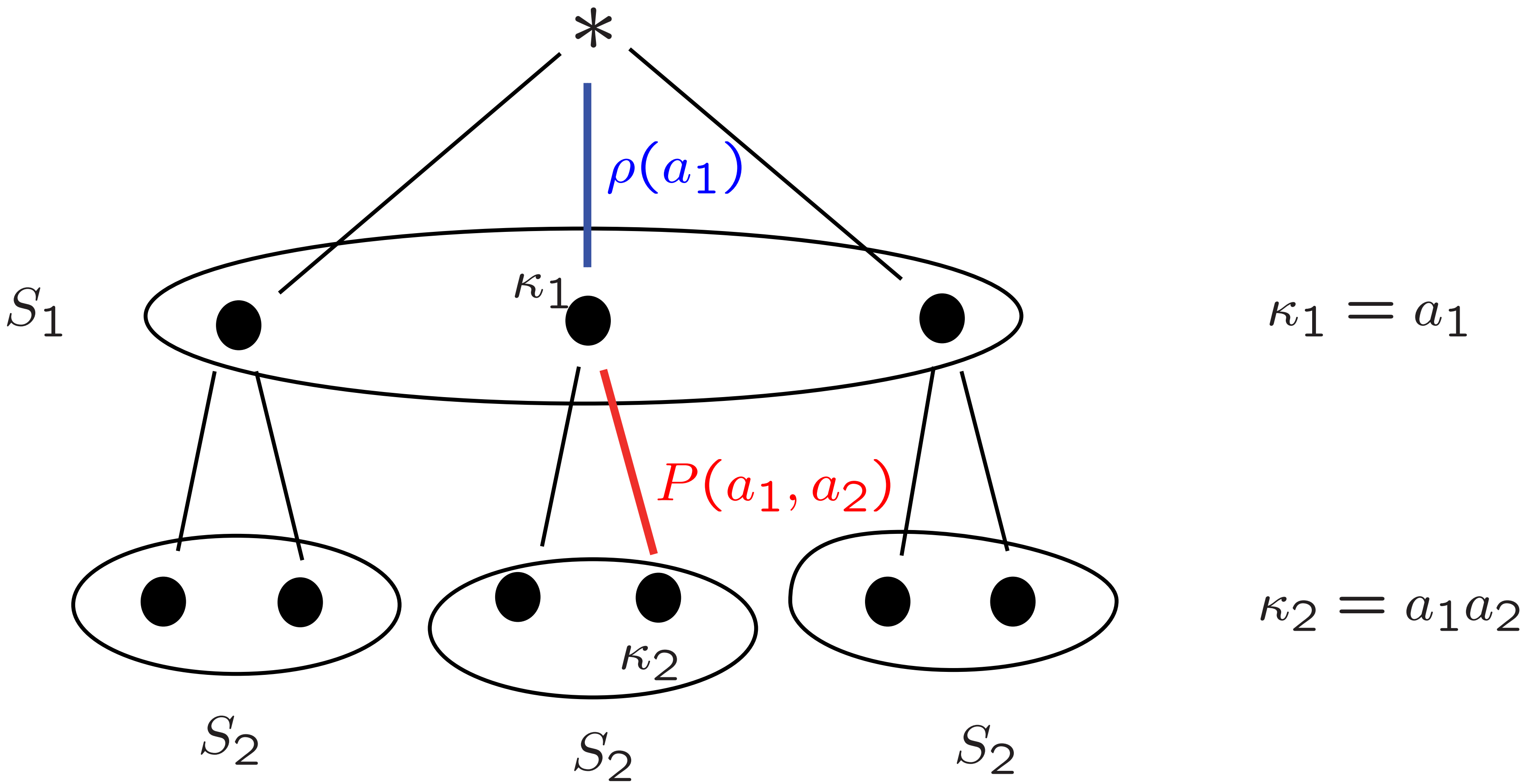
Dabei ist $a_i \in S_i :=$ Wertebereich von $X_i$.

Mehrstufige Zufallsexperimente kann man durch Bäume veranschaulichen

(Buch S. 95)

Wir erinnern uns an die

**Veranschaulichung von zweistufigen Experimenten durch *Bäume*:**




$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1) P(a_1, a_2)\,.$$

(Produkt der Kantengewichte von $*$ zum Knoten $\kappa_2$)

## Was 2 recht ist, ist $i+1$ billig:

$\kappa_i = a_1 \dots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* $i$

Die *Nachfolger* von $\kappa_i$ sind von der Form $\kappa_i \; a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, \kappa_1) := \rho(a_1) \; , \quad g(\kappa_i, \kappa_{i+1}) := P(a_1 \dots a_i, a_{i+1})$$

mit $\kappa_1 = a_1, \;\; \kappa_i = a_1 \dots a_i, \;\; \kappa_{i+1} = a_1 \dots a_{i+1}$.

**Was 2 recht ist, ist $i+1$ billig:**

$\kappa_i = a_1 \dots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* $i$

Die *Nachfolger* von $\kappa_i$ sind von der Form $\kappa_i\, a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, \kappa_1) := \rho(a_1)\ , \qquad g(\kappa_i, \kappa_{i+1}) := P(a_1 \dots a_i, a_{i+1})$$

mit $\kappa_1 = a_1,\ \ \kappa_i = a_1 \dots a_i,\ \ \kappa_{i+1} = a_1 \dots a_{i+1}$.

Die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Blatt zu enden,

ergibt sich als Produkt der Kantengewichte

entlang des Weges von der Wurzel zum Blatt.